

Competitive Algorithm Design and Practice

Bipartite Matching - Extension

2014/04/30

Guan Yu, Chen (kevinx6000)

kevinx6000@gmail.com

Department of Computer Science and Information Engineering
National Cheng Kung University
Tainan, Taiwan



Outline

- In Bipartite Graph
 - Minimum Vertex Cover
 - Maximum Independent Set

- Learn more
 - Minimum Edge Cover
 - Minimum Vertex Cover: 找出一組解

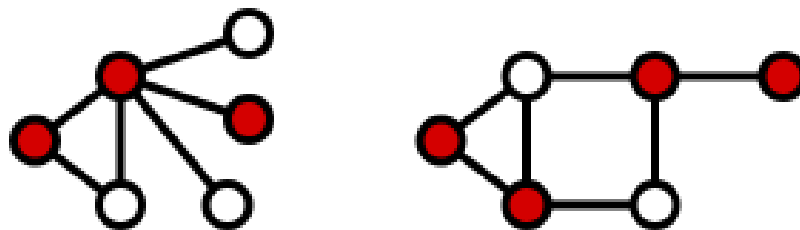


Minimum Vertex Cover



Minimum Vertex Cover

- Vertex Cover(點覆蓋)
 - 在圖上選擇點集合，使其覆蓋圖上所有的邊
 - 每條邊至少被一個點所覆蓋

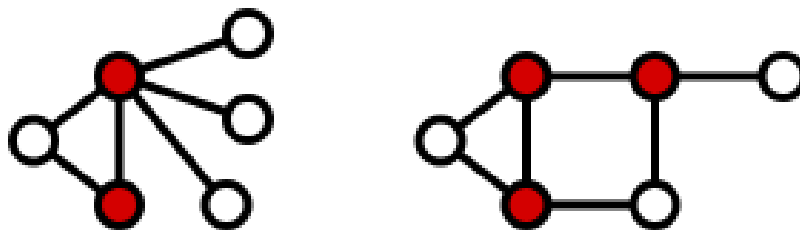


圖片來源: http://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover



Minimum Vertex Cover

- Minimum Vertex Cover(最小點覆蓋)
 - 點集合數量最少的vertex cover



圖片來源: http://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover

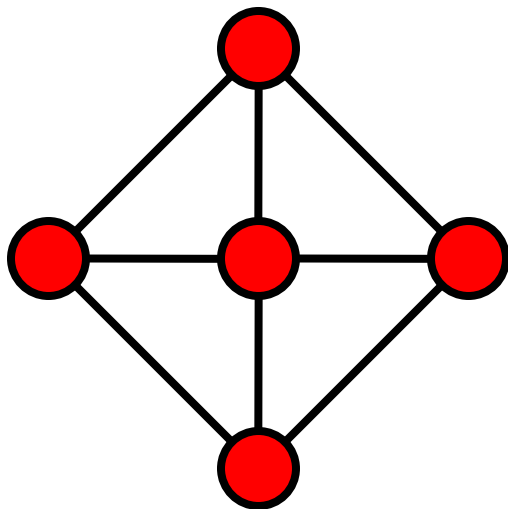
Minimum Vertex Cover

- 一般圖: NP-Complete Problem

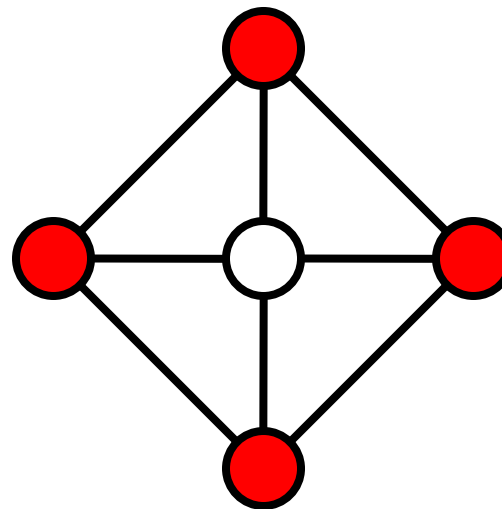


Minimum Vertex Cover

- 一般圖： NP-Complete Problem
 - *以degree數量多的優先greedy是錯誤的解法!



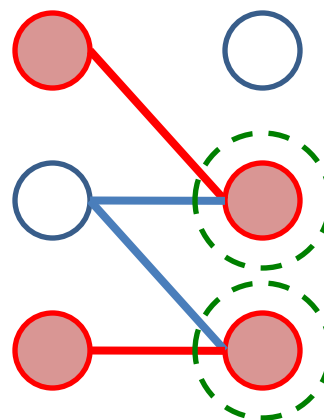
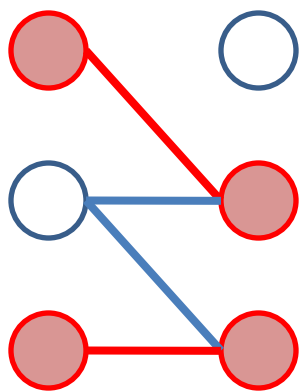
Wrong



Correct

Minimum Vertex Cover

- 二分圖： P Problem
 - 答案與 **Maximum Bipartite Matching** 數量相同
 - 換句話說，匹配邊中恰好其中一端點要被選取(匹配)而未匹配點都不選取
 - 證明: König's theorem

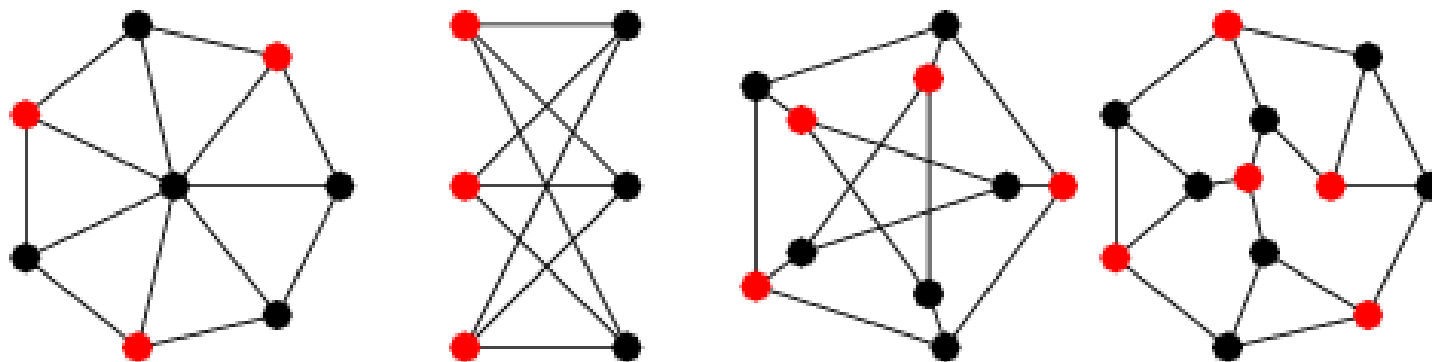


Maximum Independent Set



Maximum Independent Set

- Independent Set(獨立集)
 - 在圖上選擇點集合，使得該集合內不包含任何edge



圖片來源: <http://mathworld.wolfram.com/IndependentSet.html>

Maximum Independent Set

- Maximum Independent Set(最大獨立集)
 - 點集合數量最多的independent set



Maximum Independent Set

- 一般圖: NP-hard Problem
- 二分圖: P Problem
 - 答案與(v - 二分圖最大匹配數)相同， v 為點個數
 - 其實就是二分圖Minimum Vertex Cover的補集
 - Why?



Maximum Independent Set

- Independent Set 的補集必為 Vertex Cover
 - 假設Independent Set的補集不為Vertex Cover則必存在一條 $edge(u,v)$ ，其 u, v 兩端點包含在Independent Set中，矛盾
 - 故Independent Set的補集必為Vertex Cover
- Maximum Independent Set的補集必為 Minimum Vertex Cover
 - Trivial...



Practice

- Minimum Vertex Cover: POJ 1325
- Maximum Independent Set: POJ 2771



Learn more

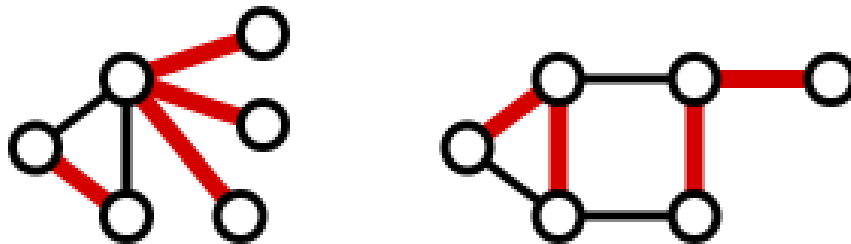


1. Minimum Edge Cover



Minimum Edge Cover

- Edge Cover (邊覆蓋)
 - 在圖上選取一些邊，使得其覆蓋所有的點

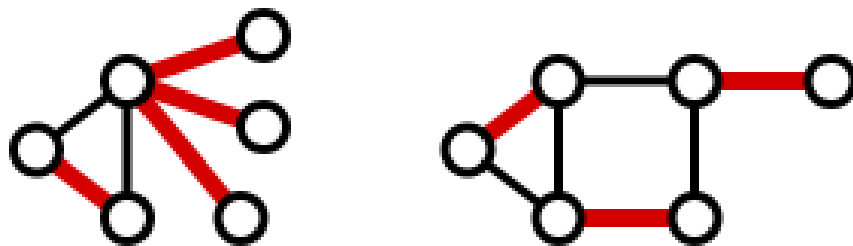


圖片來源: http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_cover



Minimum Edge Cover

- Minimum Edge Cover (最小邊覆蓋)
 - 邊集合數量最小的edge cover



圖片來源: http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_cover

Minimum Edge Cover

- 一般圖: P Problem
 - 利用一般圖最大匹配: Blossom Algorithm解之
- 二分圖: P Problem
 - 利用二分圖最大匹配解之



Minimum Edge Cover

- 不論一般圖或二分圖：
 - 先找出最大匹配，匹配邊都是Edge Cover的一部份
 - 剩下的未匹配點，都要額外用一條edge覆蓋之
 - 設最大匹配數為 K ，總點個數 V ，則：
答案為 $K + (V - 2 * K)$

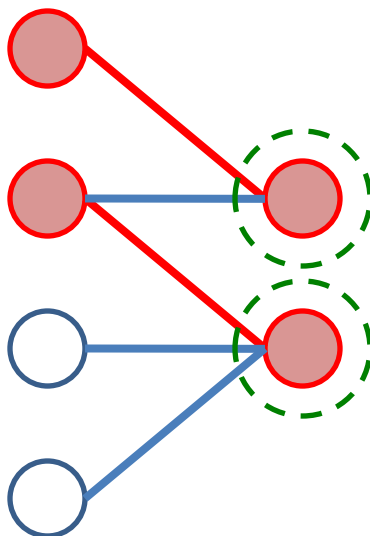


2. Minimum Vertex Cover: 找出一組解



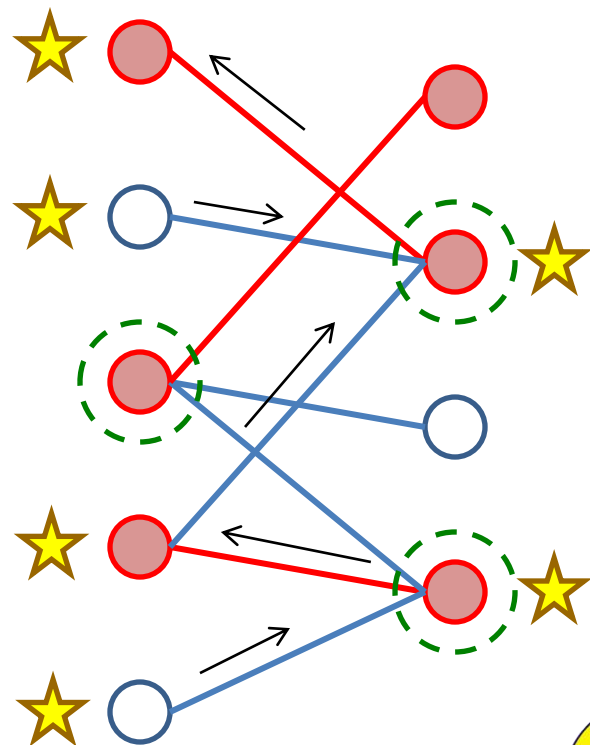
Minimum Vertex Cover

- 雖然二分圖上，跟最大匹配數量相同
但並非隨便選取匹配邊上的點就好



Minimum Vertex Cover

- 先做一次二分圖最大匹配
- 枚舉左邊群的所有未匹配點，依照 alternating path 的方式，不斷的標記延路經過的邊
- 最後左邊群未被標記的點、以及右邊群已被標記的點，就會是最小點覆蓋的一解。
- Why?
- 小觀察：
 - 左群未標記點必為匹配點
 - 右群已標記點必為匹配點



Minimum Vertex Cover

- Vertex Cover?
 - 因為我們選擇左群未標記點、右群已標記點，所以若還有邊未被覆蓋，必定為：“左端點已被標記，且右端點未被標記”的邊。
 - 對於左群未匹配點，只要有邊，一定會標記右端點
 - 對於左群已匹配點，若要被標記，一定是由右端點回來所做的標記
 - 所以不存在左端已標記、右端卻未標記的邊，故此法已包含所有的邊，為Vertex Cover



Minimum Vertex Cover

- Vertex個數等同於最大二分匹配?
 - 也就是，每條匹配邊恰好選取一端點?
 - 對於每條匹配邊：
 - 若右端點被標記，左端點必被標記(alternating path)
 - 若右端點未標記，則表示無法從其他左端點到達，滿足左端點也必未被標記
 - 因此每條匹配邊只可能是：
 - 左右端點都被標記
 - 左右端點都未標記
 - 我們選“左群未標記、右群已標記”
故每條匹配邊恰好選擇一次，滿足最大二分匹配數



Practice

- Minimum Edge Cover: UVa 10349
- Minimum Vertex Cover找解: UVa 11419



Thank you for your attention!

